Sada příkladů na základní pojmy

Příklady na rozmyšlení z minula (připomínám, že nejde o domácí úkoly):

1. Jak vypadá σ-obal množiny všech jednobodových podmnožin $\mathbb{R}$?
2. Dokažte, že σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky.

Příklady na cvičení:

1. Buď $\mathcal{S}$ σ-algebra a buďte A_i, $i \in \mathbb{N}$, její prvky. Platí $\liminf\limits_{i\to\infty} A_i \in \mathcal{S}$? Platí $\limsup\limits_{i\to\infty} A_i \in \mathcal{S}$?
2. Buď $\mathcal{S}$ σ-algebra na mnozině $\Sigma := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, jež je generována systémem množin $I_i^j := \{(x_1, x_2, \dots) \in \Sigma : x_i = j\}$, $i \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1$. Dokažte, že následující množiny patří do $\mathcal{S}$:
   (a) $\{(x_1, x_2, \dots) \in \Sigma : x_1 = x_2 = \dots = x_{39} = 1\}$,
   *(b) $\left\{(x_1, x_2, \dots) \in \Sigma : \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 1\right\}$. Návod: zkuste použít tvrzení o $\liminf$ z předchozího cvičení.
   **(c) $A_C := \left\{(x_1, x_2, \dots) \in \Sigma : \lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} x_j = C\right\}$, $C \in [0,1]$. Návod: zkuste nejdříve dokázat, že všechny množiny typu
   $$A_k^{a,b} := \left\{(x_1, x_2, \dots) \in \Sigma : a \le \sum_{j=1}^{k} x_j \le b\right\},$$
   $a \le b$, $k \in \mathbb{N}$, patří do $\mathcal{S}$. Pak se pokuste množinu A_C vyjádřit pomocí množin $A_k^{a,b}$. Na to použijte definici limity. Uvědomte si, jak kvantifikátor $\forall$ odpovídá průniku a kvantifikátor $\exists$ sjednocení.
3. Rozhodněte, zda následující podmnožiny $\mathbb{R}$ mají nulovou Lebesgueovu míru.
   (a) $[0,1]$,
   (b) $\mathbb{Q}$, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$,
   *(c) Cantorova množina $\mathcal{C}$.
4. Rozhodněte, zda následující podmnožiny $\mathbb{R}^2$ mají nulovou Lebesgueovu míru.
   (a) $\mathcal{C} \times [0,1]$, kde $\mathcal{C}$ je Cantorova množina,
   (b) $\{(x,y) : \max(|x|, |y|) = 1\}$,
   (c) $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

*5. Existuje lipschitzovská funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, aby množina $\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ měla kladnou Lebesgueovu míru?

*6. Existuje v $\mathbb{R}$ množina kladné Lebesgueovy míry, jež má prázdný vnitřek? Návod: zkuste najít diskontinuum $K \subset [0,1]$, aby míra $[0,1] \setminus K$ byla menší než 1.

Poznámky: Množina $\liminf_{i\to\infty} A_i$ je definována jako množina všech bodů, které jsou obsaženy ve všech množinách A_i až na konečně mnoho. Množina $\limsup_{i\to\infty} A_i$ je definována jako množina všech bodů, které jsou obsaženy v nekonečně mnoho množinách A_i.

Cantorova množina je definována jako množina všech čísel z intervalu $[0,1]$, která neleží v žádném intervalu tvaru $\left(\frac{(2k-1)}{3^n}, \frac{2k}{3^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, \frac{3^n-1}{2}$.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá lipschitzovská, pokud existuje $L \geq 0$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$.